

PB 1 : OPTIQUE ADAPTATIVE

La turbulence atmosphérique limite le pouvoir séparateur d'une lunette astronomique, défini comme le plus petit écart angulaire entre deux étoiles ponctuelles résolues (partie 1). Depuis une vingtaine d'années, on sait compenser l'influence néfaste de la turbulence en utilisant l'optique adaptative qui a recours à un capteur de phase et à un correcteur de phase (partie 2).

Dans tout le problème on suppose sauf indication contraire que le dispositif est plongé dans un milieu d'indice $n = 1$.

Dans tout le problème on observe des étoiles émettant en lumière blanche à travers un filtre, ce qui revient à les considérer comme des sources monochromatiques de longueur d'onde λ . Pour les applications numériques on prendra $\lambda = 500 \text{ nm}$.

1. Pouvoir séparateur d'une lunette astronomique

1.1 On modélise une lunette astronomique par une lentille mince convergente (L_1) de distance focale f_1' et d'axe optique Oz suivie d'une lentille mince convergente (L_2) de distance focale f_2' et de même axe optique Oz .

1.1.a La lunette sert à observer un objet à l'infini en en formant une image à l'infini. Comment faut-il disposer les deux lentilles ?

1.1.b Tracer l'émergent associé à un rayon lumineux incident passant par le foyer-objet F_1 de (L_1) en faisant un angle α avec l'axe optique. En déduire l'angle α' que fait le rayon émergent de (L_2) avec l'axe optique. Exprimer le grossissement $G = \alpha'/\alpha$ en fonction de f_1' et f_2' .

Dans toute la suite, on omet la lentille (L_2) et on fait comme si on mesurait l'intensité lumineuse en un point du plan focal image de (L_1). En outre, on se limite à des problèmes unidimensionnels : les rayons lumineux sont situés dans le plan de figure xOz .

1.2 On observe une étoile double $S' \neq S''$ émettant des ondes planes de même intensité \mathcal{I}_0 dans les directions respectives :

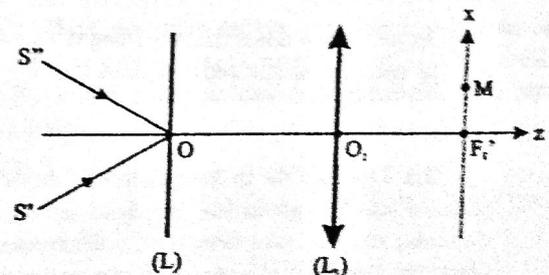
$$\vec{u}' = \sin(\alpha/2) \vec{u}_z + \cos(\alpha/2) \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{u}'' = -\sin(\alpha/2) \vec{u}_z + \cos(\alpha/2) \vec{u}_x$$

et on limite les calculs à l'ordre un en α . Qu'observe-t-on dans le plan focal image de (L_1) ?

1.3 On place devant (L_1) une lame de phase (L) de transparence complexe $t(P) = \exp(-2j\pi \beta x/\lambda)$ suffisamment fine pour qu'on la confonde avec le plan d'équation $z = 0$. De plus $|\beta| \ll 1$ de telle sorte que $\beta \approx \sin \beta$.

1.3.a En notant φ' et φ'' les phases en O , exprimer les amplitudes complexes $\underline{a}'(x, z, t)$ et $\underline{a}''(x, z, t)$ des ondes incidentes sur la lame. En déduire les amplitudes complexes $\underline{a}'(x, z = 0_-, t)$ et $\underline{a}''(x, z = 0_-, t)$ juste avant (L).

1.3.b Exprimer les amplitudes complexes $\underline{a}'(x, z = 0_+, t)$ et $\underline{a}''(x, z = 0_+, t)$ juste après (L). En déduire que deux ondes planes émergent de (L) dans le plan xOz et exprimer les angles γ' et γ'' qu'elles font avec l'axe Oz en fonction de α et β . Qu'observe-t-on dans le plan focal image de (L_1) ?



1.4 On modélise désormais la turbulence atmosphérique par une lame de phase analogue à celle étudiée en 1.3, mais où l'angle β varie aléatoirement au cours du temps entre les valeurs $\pm\beta_M$ avec un temps caractéristique d'évolution faible devant le temps d'intégration des détecteurs.

1.4.a Montrer qu'on observe dans le plan focal-image de (L_1) deux taches qu'on supposera séparées. Exprimer la largeur commune Δx et l'écart $x'' - x'$ entre leurs centres C' et C'' en fonction de f'_1 , α et β_M .

1.4.b Exprimer le pouvoir séparateur de la lunette en présence de la turbulence en fonction de β_M .

1.4.c La lame (L) modélise la couche d'air d'épaisseur $e = 100$ m située au voisinage de la lunette astronomique. L'air y est sujet à des fluctuations thermiques horizontales qu'on modélise par une variation de température de la forme $T(x) = T_0 + \theta(t)x$ avec $T_0 = 293$ K, la pression restant uniforme égale à $p = 1$ bar ; $\theta(t)$ varie entre $\pm\theta_M$ avec $\theta_M = 0,001$ K.m⁻¹. On rappelle la loi de GLADSTONE $n - 1 = K\rho$ où $K = 2,2 \cdot 10^{-4}$ kg⁻¹.m³ et où ρ est la masse volumique de l'air. On assimile l'air à un gaz parfait de masse molaire $M = 29$ g.mol⁻¹. On rappelle la valeur $R = 8,31$ J.K⁻¹.mol⁻¹ de la constante des gaz parfaits. Calculer β_M et le pouvoir séparateur de la lunette associé.

1.5 Dans cette question, on omet la turbulence atmosphérique, mais on prend en compte les effets de la diffraction due au rayon de bord fini de la lentille (L_1). Pour cela on modélise (L_1) par une lentille de rayon de bord infini précédé d'une fente infiniment longue selon Oy et de largeur a selon Ox . L'analyse de Fourier montre que cette fente est équivalente à une lame dont la transparence complexe se met sous la forme :

$$t(P) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{T}(K) \exp(-2j\pi K x) dK$$

où $|\underline{T}(K)|$ prend des valeurs négligeables pour $K < -K_m$ et $K > K_m$.

1.5.a Donner la relation en ordre de grandeur liant K_m et a . On omettra tout préfacteur numérique.

1.5.b Montrer qu'on observe dans le plan focal-image de (L_1) deux taches qu'on supposera séparées. Exprimer la largeur commune Δx et l'écart $x'' - x'$ entre leurs centres C' et C'' en fonction de f'_1 , α , a et λ .

1.5.c Calculer le pouvoir séparateur de la lunette astronomique pour $a = 1$ m. Comparer au résultat de 1.4.c et commenter.

2. Capteur et correcteur de phase (d'après X-Cachan-PSI)

On se limite désormais au cas d'une seule étoile S émettant dans la direction Oz de l'axe optique de la lunette astronomique réduite à la lentille (L_1).

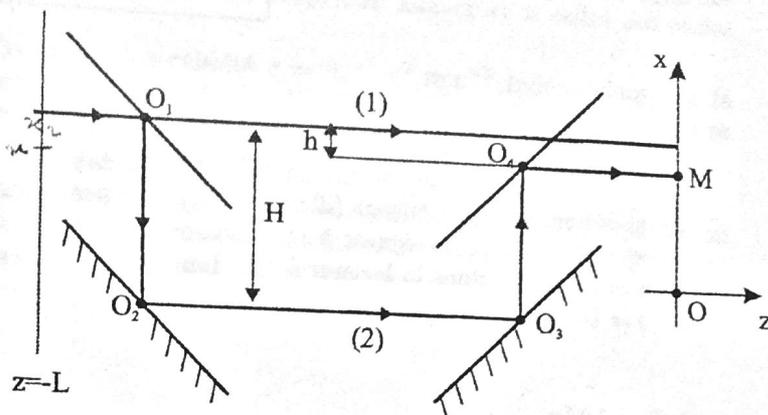
2.1 Du fait de la turbulence, l'onde incidente arrivant sur une lunette astronomique n'est pas l'onde plane d'axe Oz attendue car dans un plan $z = cste$ sa phase dépend de x . Cette onde arrive (cf. figure ci-dessous) sur un *interféromètre à dédoublement latéral* constitué d'une part de deux lames semi-réfléchissantes séparant l'onde incidente en deux ondes avec des coefficients de réflexion r et de transmission t en amplitude réels positifs et tels que $r^2 + t^2 = 1$; et d'autre part de deux miroirs plans qui engendrent un déphasage de π à la réflexion ; lames et miroirs sont disposés à 45° par rapport à l'axe Oz .

Ce dispositif permet de créer deux copies de l'onde incidente, notées (1) et (2) :

- d'une part l'onde (1) allant directement sur l'écran confondu avec le plan $z = 0$;

- et d'autre part l'onde (2) se réfléchissant successivement sur la première lame, puis sur les deux miroirs et enfin sur la deuxième lame avant d'arriver sur l'écran.

La deuxième lame est décalée dans la direction Ox d'une distance h par rapport à la première de telle sorte que les points d'impact O_1, O_2, O_3 et O_4 du rayon lumineux moyen sur les lames et les miroirs vérifient les relations $O_1O_2 = H$ et $O_3O_4 = H - h$. L'effet de ce décalage est qu'en un point $M(x, z = 0)$ de l'écran se superposent :



- d'une part l'onde de type (1) qui est arrivée sur le dispositif en passant par le point $M_1(x, z = -L)$ avec une phase $\varphi(x)$;

- et d'autre part l'onde de type (2) qui est arrivée sur le dispositif en passant par le point $M_2(x_2, z = -L)$ avec une phase $\varphi(x_2)$.

2.1.a Exprimer x_2 en fonction de x et h . Dans la suite on suppose que h est très inférieur à l'échelle des variations spatiales de la phase $\varphi(x)$ dans le plan $z = -L$ et on note $\varphi'(x) = d\varphi/dx$.

2.1.b Exprimer la différence de phase ϕ des deux ondes arrivant en M en fonction de H, h, λ et $\varphi'(x)$.

2.1.c Exprimer l'amplitude complexe des deux ondes en M en prenant l'origine des phases pour l'onde (1) en fonction de r, t, ϕ et de l'intensité incidente \mathcal{I}_0 dans le plan $z = -L$.

2.1.d Établir l'expression de l'intensité $\mathcal{I}(x)$ en M en fonction de $x, r, t, H, h, \lambda, \varphi'(x)$ et \mathcal{I}_0 .

2.1.e Quelle valeur faut-il choisir pour r et t afin d'optimiser le contraste ?

2.1.f On suppose que $h |\varphi'(x)| \ll 2\pi$ et que $2H - h = (2p + 1) \lambda/4$ avec p entier. Montrer que $\mathcal{I}(x)$ est une fonction affine de $\varphi'(x)$.

2.1.g Une barrette CCD placée dans le plan $z = 0$ permet alors de convertir l'intensité en une tension électrique proportionnelle. Un étalonnage et une intégration numérique conduisent alors à $\varphi(x)$ à une constante additive près.

- Pourquoi la constante additive n'est-elle pas gênante ?

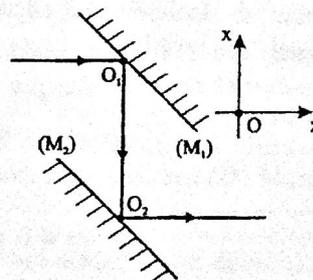
- Comment faire l'étalonnage ?

2.2 En réalité le dispositif est éclairé en lumière blanche avec un filtre centré sur la longueur d'onde moyenne $\lambda = 500$ nm et de bande passante $\Delta\lambda = 10$ nm.

2.2.a En supposant pour simplifier que $h = 0$, exprimer la différence Δp des ordres d'interférence pour les ondes traversant le filtre avec les longueurs d'ondes λ et $\lambda - \Delta\lambda/2$ en fonction de H, λ et $\Delta\lambda$.

2.2.b En déduire la valeur maximale acceptable H_M de H si on veut éviter que les franges ne se brouillent. Calculer H_M et expliquer pourquoi le système ne peut pas fonctionner tel qu'il est décrit. Faudrait-il utiliser un filtre plus sélectif ou moins sélectif ? Pourquoi cette solution ne peut-elle pas être retenue ?

2.3 On envisage un système correcteur de surface d'onde constitué des deux miroirs de la figure ci-contre. Comment faut-il opérer pour corriger la phase du défaut modélisé en 1.4 ?

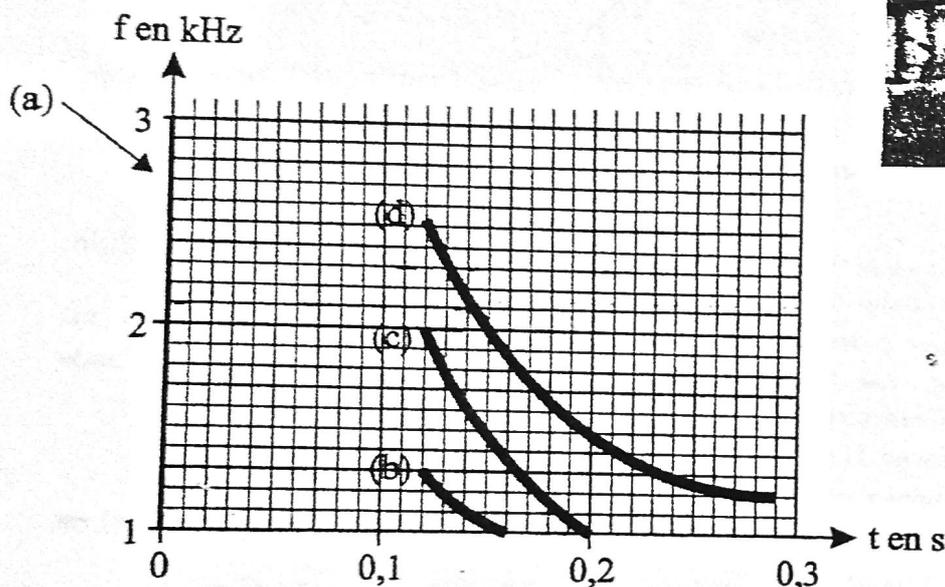
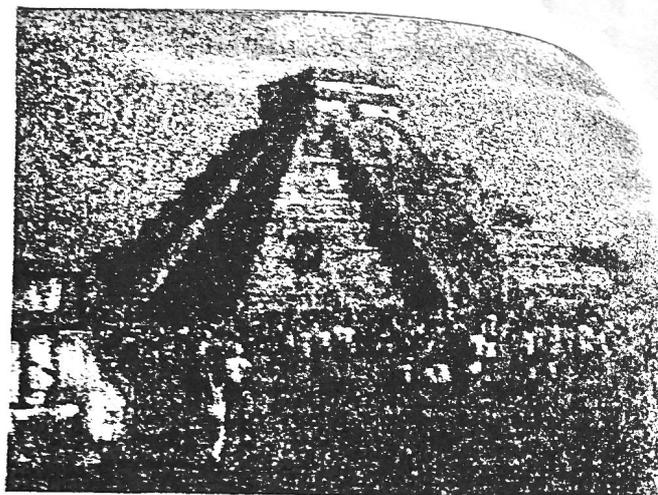


En réalité, l'action de la turbulence est beaucoup plus complexe que dans le cadre du modèle adopté et on utilise une déformation locale d'un des miroirs sous l'effet de cales piezoélectriques.

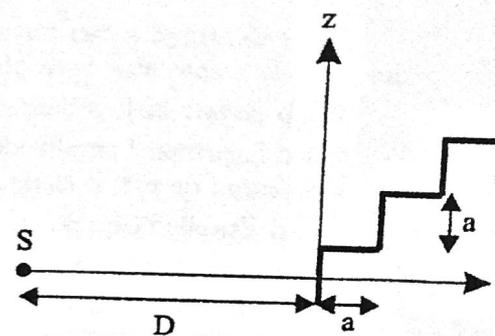
PB 2 : PYRAMIDES MAYAS

On se propose d'i
dulatoire. A cet effet
lumineuses :
◇ les ondes

La pyramide maya de Chichen Itza possède deux escaliers constitués chacun de $N=92$ marches en pierre, dont la hauteur (direction \vec{u}_z) et le pas (direction \vec{u}_x) sont égaux à une même distance $a = 26$ cm et dont la largeur (direction \vec{u}_y) vaut $b = 10$ m.



spectrogramme



pyramide de Chichen Itza

Observation O1 : Lorsqu'un observateur quasi-punctuel S situé au niveau de la base de la pyramide à une distance D frappe dans ses mains face à l'escalier, il perçoit un écho complexe de durée très supérieure à celle du son émis. Cet écho simule le chant de l'oiseau Quetzal qui se trouve être l'oiseau sacré des mayas.

¹ Une analyse spectrale du son perçu par l'observateur, limitée au domaine spectral $[1 \text{ kHz}, 3 \text{ kHz}]$ donne le spectrogramme ci-dessus, où on a placé le temps t en abscisse et la fréquence f en ordonnée. On observe quatre bandes : l'une notée (a), verticale et étroite, confondue avec l'axe $t = 0$, correspond au son émis ; les autres, inclinées et courbées, sont notées (b), (c) et (d).

Observation O2 : Ce phénomène n'est perceptible que si l'observateur n'est pas situé trop loin de la pyramide.

Observation O3 : Ce phénomène n'est perceptible que si l'observateur n'est pas situé trop près de la pyramide.

Observation O4 : Le spectrogramme réel fournit en outre en fausses couleurs la densité spectrale dI/df du son perçu et on constate que sur chacune des bandes (b), (c) et (d), la densité spectrale diminue lorsque le temps t augmente.

¹ On peut légitimement se demander si la pyramide a été conçue à cet effet ou s'il s'agit d'un hasard.

On se propose d'interpréter ces faits expérimentaux à l'aide de modèles simples issus de l'optique ondulatoire. A cet effet on admettra que les ondes sonores ont des propriétés analogues à celles des ondes lumineuses :

◇ les ondes sonores se propagent dans l'air avec une célérité $c = 3,4 \cdot 10^2 \text{ m.s}^{-1}$ indépendante de la longueur d'onde ; dans le cas des ondes sonores, cette célérité sert de référence, ce qui revient à prendre un *indice acoustique* $n = 1$ pour l'air ; la longueur d'onde d'un son monochromatique de fréquence f vaut $\lambda = c/f$;

◇ les ondes sonores donnent lieu à des phénomènes d'interférences et de diffraction pour lesquelles on peut utiliser les mêmes outils qu'en optique ondulatoire, notamment l'amplitude complexe \underline{a} , la différence de marche δ et l'intensité sonore \mathcal{I} qui est l'analogue de l'intensité \mathcal{I} en optique.

1. Préliminaires

1.1 Une étude spectrale du son émis montre qu'on peut le modéliser par une densité spectrale $d\mathcal{I}/df$ constante dans le domaine $f_{\min} \leq f \leq f_{\max}$ avec $f_{\min} = 0,5 \text{ kHz}$ et $f_{\max} = 5 \text{ kHz}$, et une densité spectrale nulle pour $f < f_{\min}$ et $f > f_{\max}$. En déduire un ordre de grandeur de la durée T du son émis et confronter le résultat à l'allure du spectrogramme.

1.2 Déduire du spectrogramme la valeur numérique de la distance D .

1.3 En déduire la valeur numérique de la date t_{\max} à partir de laquelle aucun écho ne parvient plus à l'observateur. Confronter le résultat au spectrogramme.

2. Un premier modèle

On suppose dans cette partie que l'observateur S est situé infiniment loin de la pyramide dans la direction de l'axe Ox du côté des x négatifs. On admet qu'on peut assimiler chaque face verticale de marche à son centre O_n de cote $z = na$ avec $0 \leq n \leq N - 1$.

2.1 Exprimer la différence de marche δ au niveau de l'observateur S entre les ondes reçues par S et réfléchies par deux marches successives. En déduire que les fréquences entendues sont multiples d'une fréquence fondamentale qu'on calculera numériquement. Confronter le résultat aux observations.

2.2 Soit \mathcal{I}_0 l'intensité sonore réfléchie par une marche, supposée indépendante de n .

2.2.a En prenant l'origine des phases pour l'onde réfléchie par la marche $n = 0$, exprimer l'amplitude complexe diffractée par les N marches en fonction de f , \mathcal{I}_0 , c , a et N .

2.2.b Par analogie avec un réseau plan, exprimer la largeur spectrale Δf d'un pic et la calculer. Comment Δf influe-t-elle sur le spectrogramme ?

3. Un deuxième modèle

On suppose désormais que l'observateur S est situé dans le plan $z = 0$ du centre O de la première marche à une distance D . On admet qu'on peut assimiler chaque face verticale de marche à son centre O_n de cote $z = na$ avec $0 \leq n \leq N - 1$. L'onde incidente arrivant en O_n est diffractée, de telle sorte qu'un écho est réémis en direction de l'observateur S .

3.1 Exprimer la date de réception t_n par l'observateur S de l'écho qui est diffracté par la marche de cote na avec n entier. Dans la suite, on limite les calculs à l'ordre deux en na/D . Montrer que :

$$ct_n = 2D + 2na + \frac{\alpha n^2 a^2}{D} \quad \text{où } \alpha \text{ est un nombre entier qu'on déterminera.}$$

3.2 On admet que les fréquences présentes dans le spectre à l'instant t_0 sont celles qui donnent lieu à des interférences constructives entre les ondes diffractées par les marches (n) et $(n + 1)$, assimilées à leurs centres respectifs O_n et O_{n+1} .

3.2.a Exprimer les fréquences $f_{n,p}$ présentes dans le son perçu par l'observateur S en fonction de c , a , D , n et d'un entier p .

3.2.b Interpréter l'allure du spectrogramme et donner les valeurs de p correspondant à chacune des bandes (i), (c) et (d).

3.2.c Calculer les fréquences minimales associées à chacune des bandes.

3.3 Interpréter l'observation O3 en reprenant rapidement les questions précédentes dans le cas limite $D = 0$.

3.4 En utilisant les propriétés de la diffraction, proposer une interprétation de l'observation O4.

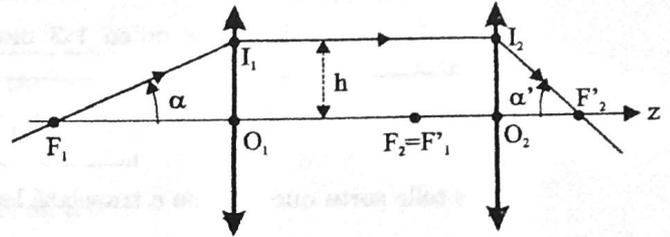
3.5 Proposer une autre interprétation de l'observation O4.

PB 1 : OPTIQUE ADAPTATIVE

1.1.a La lentille (L_1) donne d'un objet A situé à l'infini sur l'axe optique une image A_1 confondue avec son foyer-image F'_1 . Pour que l'image de A à travers la lunette soit à l'infini, il faut que A_1 , qui joue le rôle d'objet pour (L_2), soit au foyer-objet F_2 de (L_2). Il faut donc disposer les lentilles de telle sorte que :

$$F'_1 = F_2$$

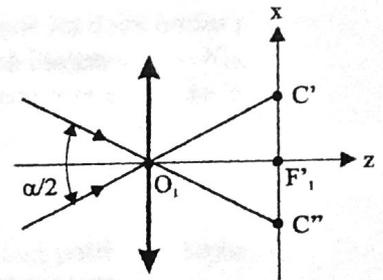
1.1.b Le rayon incident passe par F_1 , donc il émerge de (L_1) et arrive sur (L_2) parallèlement à l'axe optique. Il émerge donc de (L_2) en passant par son foyer-image F'_2 . On lit alors dans les triangles $F_1\widehat{O}_1I_1$ et $F'_2\widehat{O}_2I_2$ les petits angles :



$$\alpha = \frac{\overline{O_1I_1}}{\overline{O_1F'_1}} = \frac{h}{f'_1} \quad \text{et} \quad \alpha' = -\frac{\overline{O_2I_2}}{\overline{O_2F'_2}} = -\frac{h}{f'_2} \quad \text{soit}$$

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2}$$

1.2 On observe les images respectives C' et C'' des deux étoiles à travers (L_1), dont on lit les abscisses respectives x' et x'' sur une figure utilisant les rayons qui passent par le centre optique O_1 de (L_1) sans être déviés :



$$x' = \frac{\alpha f'_1}{2}$$

et

$$x'' = -\frac{\alpha f'_1}{2}$$

1.3.a Les amplitudes complexes des ondes planes s'écrivent :

$$\underline{a}'(x, z, t) = \sqrt{I_0} \exp\left(-\frac{2j\pi \vec{v}' \cdot \overline{OM}}{\lambda} - j\varphi'\right) \quad \text{et} \quad \underline{a}''(x, z, t) = \sqrt{I_0} \exp\left(-\frac{2j\pi \vec{v}'' \cdot \overline{OM}}{\lambda} - j\varphi''\right)$$

Soit en explicitant les composantes des vecteurs unitaires à l'ordre un en α :

$$\underline{a}'(x, z, t) = \sqrt{I_0} \exp\left(-\frac{2j\pi (z + \alpha x/2)}{\lambda} - j\varphi'\right)$$

$$\underline{a}''(x, z, t) = \sqrt{I_0} \exp\left(-\frac{2j\pi (z - \alpha x/2)}{\lambda} - j\varphi''\right)$$

On en déduit les amplitudes complexes en $z = 0_-$ juste avant la lame de phase :

$$\underline{a}'(x, 0_-, t) = \sqrt{I_0} \exp\left(-\frac{j\pi \alpha x}{\lambda} - j\varphi'\right)$$

$$\underline{a}''(x, 0_-, t) = \sqrt{I_0} \exp\left(+\frac{j\pi \alpha x}{\lambda} - j\varphi''\right)$$

1.3.b Par définition de la transparence complexe $t(P)$, les amplitudes complexes juste après la lame de phase s'obtiennent en multipliant par $\exp(-2j\pi \beta x/\lambda)$:

$$\underline{a}'(x, 0_+, t) = \sqrt{I_0} \exp\left(-\frac{j\pi (\alpha + 2\beta) x}{\lambda} - j\varphi'\right)$$

$$\underline{a}''(x, 0_+, t) = \sqrt{I_0} \exp\left(\frac{j\pi (\alpha - 2\beta) x}{\lambda} - j\varphi''\right)$$

1.3.c On identifie alors chacun des termes obtenu en 1.3.b à l'expression dans le plan $z = 0$ d'une onde plane se propageant dans une direction $\vec{u} \approx \gamma \vec{u}_x + \vec{u}_z$ faisant avec l'axe optique un angle γ soit :

$$\underline{a}(x, z, t) = \sqrt{I_0} \exp\left(-\frac{2j\pi(z + \gamma x)}{\lambda} - j\varphi\right) \quad \text{et} \quad \underline{a}(x, 0_+, t) = \sqrt{I_0} \exp\left(-\frac{2j\pi \gamma x}{\lambda} - j\varphi\right)$$

de telle sorte que les angles cherchés valent :

$$\boxed{\gamma' = \beta + \frac{\alpha}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\gamma'' = \beta - \frac{\alpha}{2}}$$

La même démarche qu'en 1.2 montre qu'on observe dans le plan focal image de (L_1) deux taches d'abscisses :

$$\boxed{x' = \beta f'_1 + \frac{\alpha f'_1}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{x'' = \beta f'_1 - \frac{\alpha f'_1}{2}}$$

de telle sorte que la lame a translaté les images des deux étoiles de $\beta f'_1$.

1.4.a Comme le détecteur moyenne sur une durée grande devant la durée d'évolution de $\beta(t)$, les images associées aux différentes valeurs de $\beta(t)$ se superposent et forment deux segments tels que :

$$-\beta_M f'_1 - \frac{\alpha f'_1}{2} < x < \beta_M f'_1 - \frac{\alpha f'_1}{2} \quad \text{et} \quad -\beta_M f'_1 + \frac{\alpha f'_1}{2} < x < \beta_M f'_1 + \frac{\alpha f'_1}{2}$$

Les abscisses des centres des taches correspondent aux valeurs moyennes des abscisses de leurs extrémités, c'est-à-dire aux positions des images en l'absence de turbulence :

$$\boxed{x' = \frac{\alpha f'_1}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{x'' = -\frac{\alpha f'_1}{2}}$$

La largeur commune aux deux taches est la différence des abscisses de leurs extrémités, soit :

$$\boxed{\Delta x = 2\beta_M f'_1}$$

1.4.b Les deux étoiles sont "résolues" par la lunette si les taches obtenues dans le plan focal image de (L_1) sont disjointes c'est-à-dire si :

$$\beta_M f'_1 - \frac{\alpha f'_1}{2} < -\beta_M f'_1 + \frac{\alpha f'_1}{2} \quad \text{soit} \quad \alpha f'_1 > 2\beta_M f'_1 \quad \text{puis} \quad \boxed{\alpha > 2\beta_M}$$

1.4.c On suppose les rayons lumineux suffisamment peu inclinés pour évaluer les chemins optiques avec un trajet géométrique e . La différence de marche entre un rayon lumineux passant en $x = 0$ et un rayon lumineux passant en x quelconque s'écrit alors :

$$\delta = (n(x) - n_0) e = K e (\rho(x) - \rho_0)$$

L'équation d'état des gaz parfaits permet d'exprimer la masse volumique $\rho = M p / RT$. Puis en prenant la différentielle logarithmique, il vient :

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = -\frac{\Delta T}{T} \quad \text{d'où} \quad \rho(x) - \rho_0 = -\frac{\rho_0 (T(x) - T_0)}{T_0} = -\frac{\rho_0 \theta x}{T_0}$$

On en déduit la différence de marche puis le déphasage introduit par la couche d'air :

$$\delta = -\frac{K \rho_0 e \theta x}{T_0} \quad \text{puis} \quad \varphi = \frac{2\pi \delta}{\lambda} = -\frac{2\pi K \rho_0 e \theta x}{T_0 \lambda}$$

En identifiant avec l'expression du déphasage associé à la transparence complexe de la lame (L), on obtient :

$$\frac{2\pi \beta x}{\lambda} = \frac{2\pi K \rho_0 e \theta x}{T_0 \lambda} \quad \text{soit} \quad \beta = \frac{K \rho_0 e \theta}{T_0}$$

On en déduit β_M et le pouvoir séparateur de la lunette associé :

$$\beta_M = \frac{K \rho_0 e \theta_M}{T_0} = 9,5 \cdot 10^{-7} \text{ rad} \quad \text{et} \quad \alpha_m = 2\beta_M = 1,9 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

1.5.a L'analyse de Fourier montre qu'en ordre de grandeur, on a :

$$\Delta x \Delta K \approx 1 \quad \text{soit} \quad a K_m \approx 1 \quad \text{puis} \quad K_m \approx \frac{1}{a}$$

1.5.b La même démarche qu'en 1.4 avec la transposition $2\pi \beta / \lambda \rightarrow K$ montre que les deux ondes planes incidentes d'angles $\pm \alpha/2$ donnent naissance pour chaque valeur de K compris dans l'intervalle $[-K_m, K_m]$ à deux ondes planes faisant les angles respectifs :

$$\gamma' = \frac{K \lambda}{2\pi} + \frac{\alpha}{2} \quad \text{et} \quad \gamma'' = \frac{K \lambda}{2\pi} - \frac{\alpha}{2}$$

Ces ondes engendrent deux points lumineux dans le plan focal-image de (L_1) aux points d'abscisses :

$$x' = \frac{K \lambda f'_1}{2\pi} + \frac{\alpha f'_1}{2} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{K \lambda f'_1}{2\pi} - \frac{\alpha f'_1}{2}$$

Lorsque K varie entre $-K_m$ et $+K_m$, on engendre deux taches centrées en :

$$x' = \frac{\alpha f'_1}{2} \quad \text{et} \quad x'' = -\frac{\alpha f'_1}{2} \quad \text{de largeur} \quad \Delta x = \frac{2K_m \lambda f'_1}{2\pi} \quad \text{soit} \quad \Delta x = \frac{\lambda f'_1}{\pi a}$$

1.5.c Les deux étoiles sont séparées si :

$$\frac{K_m \lambda f'_1}{2\pi} - \frac{\alpha f'_1}{2} < -\frac{K_m \lambda f'_1}{2\pi} + \frac{\alpha f'_1}{2} \quad \text{soit} \quad \alpha > \frac{K_m \lambda}{\pi} \quad \text{puis} \quad \alpha > \frac{\lambda}{\pi a} = 1,6 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

Cette valeur est inférieure à la valeur obtenue en 1.4.c et justifie qu'on tente d'éliminer les effets de la turbulence dans la suite.

2.1.a La deuxième lame étant décalée de h vers le bas, le rayon (2) qui la traverse se trouve décalé de h vers le bas. Donc pour se superposer à un rayon (1) qui reste à l'abscisse x , le rayon (2) doit être issu d'un rayon d'abscisse :

$$x_2 = x + h$$

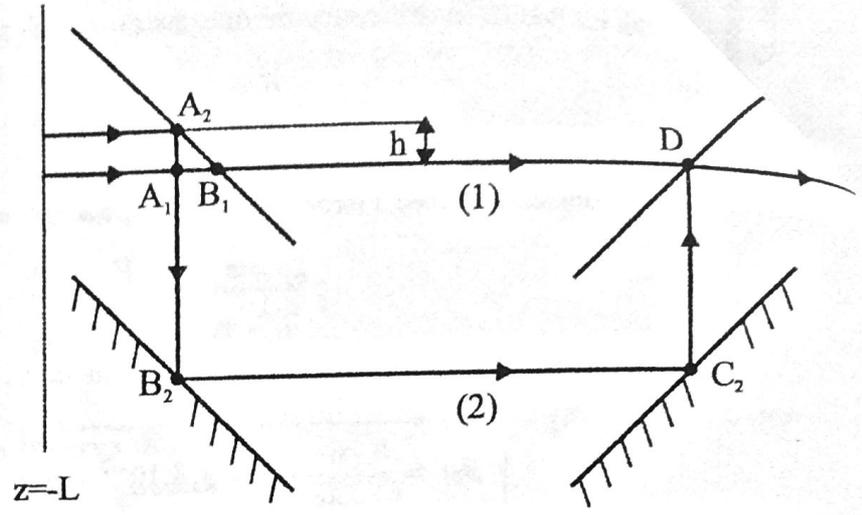
2.1.b On lit directement sur la figure ci-contre les distances :

$$A_2B_2 = H \quad \text{et} \quad C_2D = H - h$$

En remarquant que les trajets B_2C_2 et A_1D sont égaux, on en déduit la différence des chemins optiques :

$$\delta = (SM)_2 - (SM)_1 = A_2B_2 + C_2D$$

soit $\delta = H + H - h = 2H - h$



et on en déduit la différence de phase des deux ondes arrivant en M en remarquant que dans le plan d'entrée $A_2A_1B_2$ la différence de phase vaut $\varphi(x+h) - \varphi(x)$:

$$\phi = \varphi(x+h) - \varphi(x) + \frac{2\pi(2H-h)}{\lambda}$$

La distance h étant faible devant la distance caractéristique de variation de $\varphi(x)$, on peut faire un développement de TAYLOR d'ordre un :

$$\phi = h\varphi'(x) + \frac{2\pi(2H-h)}{\lambda}$$

2.1.c L'onde (1) traverse chacune des lames et sert de référence de phase donc :

$$\underline{a}_1 = t^2 \sqrt{I_0}$$

L'onde (2) est déphasée de ϕ car les deux déphasages de π sur les miroirs sont sans effet global. Elle se réfléchit sur chacune des séparatrices, donc :

$$\underline{a}_2 = r^2 \sqrt{I_0} \exp(-j\phi)$$

2.1.d Les deux ondes sont cohérentes car elles sont issues de la même source ponctuelle monochromatique, donc l'amplitude complexe totale vaut :

$$\underline{a} = \underline{a}_1 + \underline{a}_2 = t^2 \sqrt{I_0} + r^2 \sqrt{I_0} \exp(-j\phi)$$

On en déduit l'intensité :

$$\mathcal{I} = |\underline{a}|^2 = I_0 (r^4 + t^4 + 2r^2t^2 \cos \phi) \quad \text{soit} \quad \mathcal{I} = I_0 \left(r^4 + t^4 + 2r^2t^2 \cos \left(h\varphi'(x) + \frac{2\pi(2H-h)}{\lambda} \right) \right)$$

2.1.e Le contraste est optimal si les deux ondes ont même intensité donc si $r^2 = t^2$ ou aussi bien $r = t$. Avec la relation de conservation de l'énergie $r^2 + t^2 = 1$ il vient alors :

$$r^2 = t^2 = \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad r = t = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{puisque } r \text{ et } t \text{ sont réels positifs.}$$

2.1.f Avec $r = t = \sqrt{2}/2$ et $2H - h = (2p + 1)\lambda/4$, la formule de FRESNEL se simplifie en :

$$I = \frac{1}{2} I_0 \left(1 + \cos \left(h \varphi'(x) + \frac{(2p + 1)\pi}{2} \right) \right) = \frac{I_0 (1 - \sin(h \varphi'(x)))}{2}$$

Avec $h|\varphi'| \ll 2\pi$ on peut linéariser le sinus et il vient finalement :

$$I = \frac{I_0 (1 - h \varphi'(x))}{2}$$

de telle sorte que l'intensité est bien une fonction affine de $\varphi'(x)$.

2.1.g La constante additive n'est pas gênante car elle ne change rien au caractère plan de l'onde corrigée, caractérisé par le fait que $\varphi(x)$ ne dépend pas de x . Pour l'étalonnage on peut envisager d'éclairer le système avec une onde plane faisant un petit angle γ connu avec Oz , ce qui induit une phase $\varphi(x) = 2\pi \gamma x/\lambda$ fonction affine de x et donc telle que $\varphi'(x)$ est connue.

2.2.a En utilisant l'expression de la différence de marche établie en 2.1 dans le cas particulier où $h = 0$, il vient :

$$\Delta p = \frac{2H}{\lambda - \Delta\lambda/2} - \frac{2H}{\lambda} = \frac{2H}{\lambda} \left(\left(1 - \frac{\Delta\lambda}{2\lambda} \right)^{-1} - 1 \right) \quad \text{soit} \quad \Delta p = \frac{H \Delta\lambda}{\lambda^2}$$

en limitant les calculs à l'ordre un en $\Delta\lambda/\lambda$.

2.2.b Pour éviter que les franges ne se brouillent, il faut que les franges brillantes d'une longueur d'onde du spectre ne puissent pas coïncider avec les franges sombres d'une autre longueur d'onde du spectre. Le critère cherché peut donc s'écrire en ordre de grandeur :

$$\Delta p < \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \frac{H \Delta\lambda}{\lambda^2} < \frac{1}{2} \quad \text{puis} \quad H < H_M = \frac{\lambda^2}{2 \Delta\lambda} = 12 \mu\text{m}$$

ce qui est très contraignant, notamment parce que le miroir va se trouver devant la lame et empêcher le bon fonctionnement du système. On pourrait songer à utiliser un filtre plus sélectif pour augmenter H_{\max} mais l'énergie transmise risquerait alors d'être insuffisante.

2.3 Une rotation du miroir (M_1) d'un angle θ induit une rotation d'angle 2θ sur le faisceau émergent. Cette rotation doit compenser la rotation d'angle β due à la turbulence qui a été mise en évidence à la question 1.3. Il faut donc choisir :

$$\theta = \frac{\beta}{2}$$

PB 2 : PYRAMIDES MAYAS (d'après oral X - Cachan PSI 2005)

1.1 D'après la propriété fondamentale de la transformée de FOURIER, la largeur spectrale Δf du son émis est telle que¹ :

$$T \Delta f \approx 1 \quad \text{soit avec} \quad \Delta f = f_{\max} - f_{\min} \quad , \quad T \approx \frac{1}{f_{\max} - f_{\min}} = 2.10^{-4} \text{ s}$$

La durée du son émis est la largeur temporelle de la bande spectrale (a) : elle est effectivement imperceptible à l'échelle caractéristique du spectrogramme, soit un dixième de seconde.

¹ Toute autre valeur du produit $T \Delta f$ est bien entendu acceptable, s'agissant d'une analyse en ordre de grandeur.

1.2 Les bandes correspondant à l'écho commencent toutes à l'instant $t_{\min} = 0,12$ s qui correspond intuitivement au temps minimum pour faire un aller-retour sur la plus petite distance à la pyramide, soit D . Ainsi :

$$2D = ct_{\min} \quad \text{soit} \quad \boxed{D = \frac{ct_{\min}}{2} = 20 \text{ m}} \quad \text{ce qui est crédible.}$$

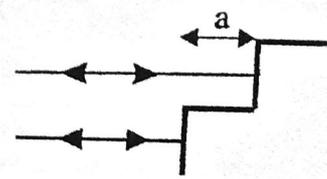
1.3 Le point le plus éloigné de l'émetteur S est le sommet de la pyramide situé à une distance $d_{\max} = \sqrt{(D + Na)^2 + N^2 a^2}$. Ainsi, le dernier écho perçu est reçu à l'instant :

$$\boxed{t_{\max} = \frac{2 \sqrt{(D + Na)^2 + N^2 a^2}}{c} = 0,29 \text{ s}}$$

Cette durée correspond bien à la durée maximale qui apparaît sur le spectrogramme sur la bande (d), mais on ne peut pas conclure sur les bandes (b) et (c) qui sont coupées par l'analyseur de spectre.

2.1 On voit immédiatement sur une figure que la différence de marche entre les ondes réfléchies par deux marches successives correspond à un aller-retour sur une distance a et vaut donc :

$$\boxed{\delta = 2a}$$



La pyramide se comporte comme un réseau par réflexion à $N = 92$ éléments. On s'attend donc à un phénomène d'interférences très sélectif. Seules les fréquences correspondant à des interférences constructives sont entendues, soit :

$$2a = p\lambda = \frac{pc}{f_p} \quad \text{puis} \quad \boxed{f_p = p f_1} \quad \text{avec} \quad \boxed{f_1 = \frac{c}{2a} = 0,66 \text{ kHz}}$$

La fréquence f_1 est absente du spectrogramme : c'est normal car elle est inférieure au seuil de mesure $f_m = 1$ kHz. En revanche les fréquences $2f_1 = 1,3$ kHz, $3f_1 = 2,0$ kHz et $4f_1 = 2,6$ kHz correspondent aux fréquences maximales des bandes (b), (c) et (d). Mais le spectre de l'écho ne dépend pas du temps, ce qui contredit l'observation O1. Comme le modèle situe l'observateur à l'infini, il rend néanmoins compte de l'observation O2 : le phénomène n'est pas observable si l'observateur est situé trop loin de la pyramide.

2.2.a Les ondes réfléchies par les différentes marches sont cohérentes, donc l'amplitude complexe totale s'écrit :

$$\underline{a} = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{I_0} \exp(-2j\pi (SO_n M)/\lambda)$$

En prenant l'origine des phases pour l'onde $n = 0$ et en utilisant le résultat établi en 2.1 il vient :

$$\underline{a} = \sum_{n=0}^{N-1} \sqrt{I_0} \exp(-4j\pi n a/\lambda) = \sqrt{I_0} \sum_{n=0}^{N-1} (\exp(-4j\pi a/\lambda))^n$$

En remplaçant $\lambda = c/f$ et en sommant la suite géométrique il vient :

$$\boxed{\underline{a} = \sqrt{I_0} \left(\frac{\exp(-4j\pi N a f/c) - 1}{\exp(-4j\pi a f/c) - 1} \right)}$$

s qui correspond
pyramide, soit D .

2.2.b L'amplitude complexe et donc aussi l'intensité sonore s'annulent pour $f = qc/2Na$ avec q entier non multiple de N . Le premier zéro au voisinage d'un maximum correspond donc à une variation :

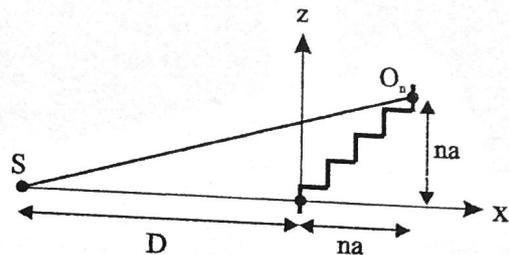
$$\Delta f = \frac{c}{2Na} = 7 \text{ Hz}$$

Cette fluctuation rend compte de l'épaisseur verticale (c'est-à-dire à t fixé) des bandes (b), (c) et (d).

3.1 On lit sur la figure ci-contre le trajet parcouru par l'écho diffracté par la marche (n) et on en déduit la date de réception de l'écho supposé émis à l'instant $t = 0$:

$$t_n = \frac{2SO_n}{c} \quad \text{soit}$$

$$t_n = \frac{2\sqrt{(D+na)^2 + n^2a^2}}{c}$$



En utilisant le développement limité $(1 + \epsilon)^{1/2} = 1 + \epsilon/2 - \epsilon^2/8$, il vient :

$$ct_n = 2D \left(1 + \frac{2na}{D} + \frac{2n^2a^2}{D^2} \right)^{1/2} = 2D \left(1 + \frac{na}{D} + \frac{n^2a^2}{D^2} - \frac{1}{8} \left(\frac{2na}{D} \right)^2 \right) = 2D \left(1 + \frac{na}{D} + \frac{n^2a^2}{2D^2} \right)$$

et on obtient l'expression attendue :

$$ct_n = 2D + 2na + \frac{n^2a^2}{D} \quad \text{soit} \quad \alpha = 1$$

3.2.a On en déduit la différence de marche entre les ondes diffractées par deux marches successives :

$$\delta = ct_{n+1} - ct_n = 2D + 2(n+1)a + \frac{(n+1)^2a^2}{D} - 2D - 2na - \frac{n^2a^2}{D} \quad \text{soit} \quad \delta = 2a + \frac{(2n+1)a^2}{D}$$

La condition d'interférences constructives s'écrit alors :

$$\delta = p\lambda = \frac{pc}{f} \quad \text{soit} \quad 2a + \frac{(2n+1)a^2}{D} = \frac{pc}{f} \quad \text{puis} \quad f_{n,p} = \frac{pc}{2a} \left(1 + \frac{(2n+1)a}{2D} \right)^{-1}$$

3.2.b Pour $n = 0$, on retrouve (à l'ordre zéro en a/D) les fréquences $pc/2a$ obtenues dans la partie 2, ce qui conduit à associer les bandes (b), (c) et (d) respectivement aux entiers $p = 2, p = 3$ et $p = 4$.

De plus, l'entier "n" paramètre à la fois les dates de réceptions des échos et les fréquences présentes dans le spectre : à p fixé, lorsque n augmente, la date de réception t_n augmente alors que la fréquence $f_{n,p}$ diminue : le modèle explique la modulation de fréquence avec une fréquence décroissante pour chaque bande au cours du temps conforme au spectrogramme.

3.2.c On obtient les fréquences minimales associées à chacune des bandes en prenant $n = N = 92$:

$$f_{N,2} = \frac{c}{a} \left(1 + \frac{(2N+1)a}{2D} \right)^{-1} = 0,59 \text{ kHz} \quad ; \quad f_{N,3} = \frac{3f_{N,2}}{2} = 0,89 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad f_{N,4} = 2f_{N,2} = 1,2 \text{ kHz}$$

Les valeurs de $f_{N,2}$ et $f_{N,3}$ sont inférieures au seuil $f_m = 1 \text{ kHz}$ d'analyse, ce qui explique que les branches (b) et (c) semblent coupées. En revanche pour la branche (d), la valeur semble correspondre à une asymptote horizontale.

3.3 Pour $D = 0$, les développements limités en na/D ne sont plus valables, mais les expressions exactes des grandeurs utiles se simplifient en :

$$t_n = \frac{2\sqrt{2}na}{c} \quad \text{et} \quad \delta = ct_{n+1} - ct_n = \frac{2\sqrt{2}a}{c}$$

pour tout n . Ainsi, les fréquences sélectionnées aux différents instants t_n sont indépendantes de n donc du temps et la modulation de fréquence disparaît. Par extension, le cas limite $D = 0$ s'applique aux situations où l'observateur est situé "trop près" de la pyramide et on interprète ainsi l'observation O3.

3.4 Pour envoyer un écho vers l'observateur, la diffraction doit faire tourner le rayon de $2i_n$, où i_n varie de 0 à la base de la pyramide jusqu'à un angle proche de $Na/(D+Na) \approx 0,5 \text{ rad}$ à son sommet. Or la diffraction par une marche engendre un flou angulaire :

$$\Delta i' \approx \frac{\lambda}{a} = \frac{c}{af} \approx 0,4 \text{ rad} \quad \text{pour } f = 3 \text{ kHz}$$

Lorsque t augmente, n augmente, donc i_n augmente et l'efficacité de la diffraction est de plus en plus sollicitée, d'où une intensité diffractée décroissante conforme à l'observation O4.

3.5 Lorsque t augmente, n augmente donc la distance parcourue augmente. Or l'intensité des ondes sphériques décroît avec la distance d en $1/d^2$. Comme d varie de $D = 20 \text{ m}$ à $\sqrt{(D+Na)^2 + N^2a^2} = 50 \text{ m}$ et que cet effet joue une fois à l'aller et une fois au retour, ceci engendre une réduction maximale d'un facteur $(2,5)^2 \approx 6$ de l'intensité sonore.